

Угловые векторы в теории векторов

Аннотация

Рассмотрена теория угловых векторов, которая позволяет полноценно моделировать свойства угловых физических величин. Кардинально пересмотрен и изменен смысл векторного произведения векторов. Введены формулы для нахождения крутящего момента и угловой скорости в координатно-векторном виде с правильным отображением их направлений. Описано определение и свойства обратного вектора, который позволяет производить операции векторного деления.

Ключевые слова: угловой вектор, векторное произведение векторов, обратный вектор, теория векторов.

Статья опубликована в Journal of Mathematics Research, <https://doi.org/10.5539/jmr.v9n5p71>

1. Введение

Для описания физических величин, обладающих направлением (скорость, ускорение, сила и др.), теория векторной алгебры успешно описывает с помощью прямолинейных векторов. (Dennis & Michael, 2006 p. 301).

Но существуют также физические величины, обладающие угловым направлением (угловая скорость, угловое ускорение, крутящий момент, момент инерции и др.). Данные величины математически описываются тоже как прямолинейные.

Проблема заключается в том, что при попытке представить угловые величины как прямолинейные, мы получаем несоответствие направлений физической величины и математического вектора. Мы получаем математический вектор (Kumar, 2008 p. 75), направленный перпендикулярно к направлению действия физической величины. А физическая величина направлена как бы по окружности в плоскости ее действия. Например, на рис.1 показано вращающееся тело, и различие действительного направления угловой скорости тела и математического вектора угловой скорости.

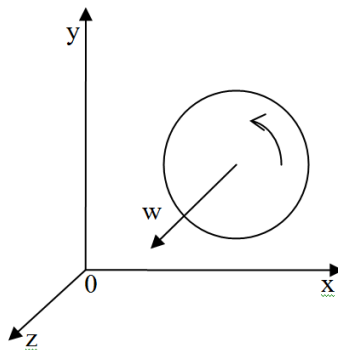


Рис. 1: Графическое представление математического вектора угловой скорости и направление физической угловой скорости при вращении тела

Рассмотрим более детально пример задачи с несогласующимися направлениями.

Найдем величину и направление крутящего момента на валу пропеллера, когда на его лопастях сидят птицы, рис. 2. Пропеллер находится в плоскости OXY .

При решении единичных задач с участием людей, используются уравнения общего вида (Boothroyd & Poli, 1980 p.19). В этих уравнениях при любом изменении расположения сил, приходится вручную указывать направления образующихся крутящих моментов.

$$M = +r_1 \cdot F_1 - r_2 \cdot F_2 \quad (1)$$

Для вычисления в автоматических программах, используются формулы нахождения момента в координатно-векторном виде (Szolga, 2010 p. 28). Но в них тоже возникает путаница с направлениями крутящего мо-

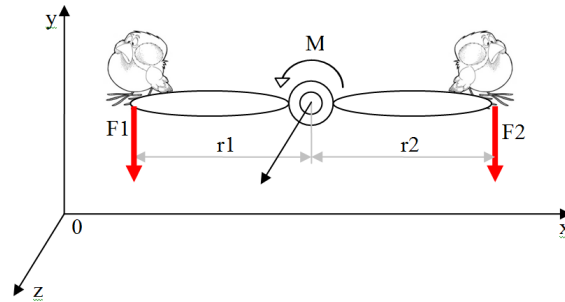


Рис. 2: Наличие сил и момента на винте

мента:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \bar{M}_1 + \bar{M}_2 \\ \bar{M}_{1,2} &= \bar{r} \times \bar{F} = (r_y F_z - r_z F_y)\bar{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\bar{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\bar{k} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k} \\ \bar{M}_{1,2} &= 0\bar{i} + 0\bar{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\bar{k} = M_z \bar{k}\end{aligned}\quad (2)$$

У нас не возникает путаницы со знаками сил (F_1, F_2) как у формул векторного вида, но направление общего математического момента $\bar{M}$ и действительного физического момента не совпадают. Потому что общий момент получается как прямолинейный вектор, направленный параллельно оси OZ для данной задачи. В результате мы не можем однозначно указать, в какую сторону направлен крутящий физический момент, по часовой стрелке, или против часовой стрелки.

Другими словами мы не можем правильно отобразить направление угловых физических величин в системе координат.

Данная работа показывает, как можно изменить описание математической модели угловых величин, и рассматривать их отдельно от прямолинейных. Описанная теория угловых векторов хорошо согласуется с теорией прямолинейных векторов и является ее дополнением. При этом расширяются возможности применения общей теории векторного моделирования.

Если сделать краткий обзор, то в используемых формулах, угловые векторы почти не отличаются от прямолинейных векторов. Главное их отличие – это представление угловых векторов и их проекций, в системе координат. Так же предложены изменения в векторном произведении векторов. И благодаря описанному обратному вектору, появляется возможность векторного деления.

2. Теория угловых векторов

Для описания физических величин, обладающих величиной и направлением, применяется математическая модель – называемая вектор. Физические величины различаются по типу (скорость, ускорение...), поэтому нужно помнить, что векторы тоже условно разделяются по типу представляемых физических величин.

2.1 Обозначение векторов

Угловой вектор имеет размер (величину) и направление, но не обладает точным местоположением, и находится в плоскости действия отображаемой физической величины. Это свойство всех угловых векторов покажем на примерах для кинематических и силовых величин.

Пример 1: Сателлит дифференциального механизма имеет сложное движение и вращается вокруг двух осей: основной оси и подвижной оси. Следовательно, он имеет три угловые скорости: вокруг основной оси, вокруг подвижной оси и общую угловую скорость, которая не имеет своей оси. Но все эти угловые скорости имеют направление и величину.

Даже для вектора угловой скорости, которая имеет свою ось вращения, мы не можем указать то место на плоскости, где он находится в данный момент времени.

Пример 2: Угловой вектор крутящего момента приобретает точное местоположение только при наличии связей, в которых из крутящего момента формируются силы. Местоположение связей могут меняться,

следовательно, меняются и силы, при этом величина и направление момента не меняется.

Геометрическое обозначение

Изображения угловых векторов уже давно известны. Это могут быть изогнутые стрелки отображающие кинематические величины, рис.3 (угловой скорости, углового ускорения). Или стрелки (двух стрелок) с рычагом, отображающие силовые величины (крутящий момент, момент инерции). Эти обозначения **условно** отображают о наличии углового вектора на плоскости.

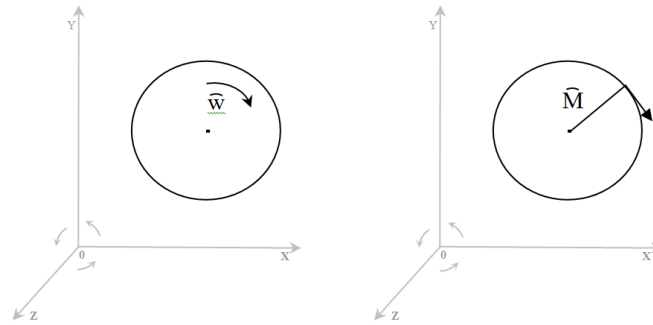


Рис. 3: Обозначения угловых векторов

Математическое обозначение

Для отличия от прямолинейного вектора, угловой вектор можно обозначать с изогнутой стрелкой (линией) над буквой $\hat{b}$.

В системе координат угловой вектор обозначается как проекция, на координатные плоскости

$$\hat{b}(b_{xy}, b_{yz}, b_{zx}) \quad (3)$$

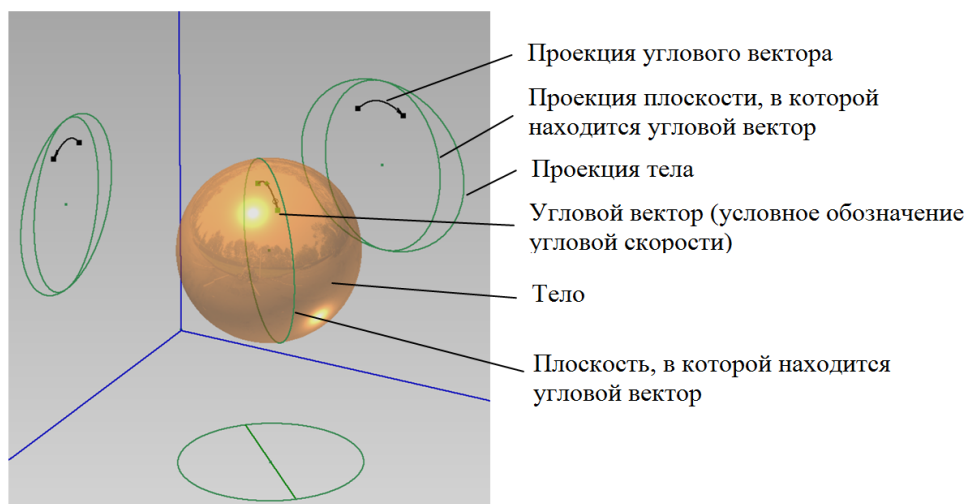


Рис. 4: Представление углового вектора в системе координат

Данная форма записи (неявная) показывает только направление и величину вектора, и точно в системе координат его не определяет. Этот вектор может быть одним из множества параллельных, одинаково направленных угловых векторов.

Только так можно представить физическую величину без точного местоположения, расположенную на какой-то плоскости.

Угловой вектор не может проецироваться на координатные оси, так как при переходе на координатные оси мы теряем направление углового вектора. Проекция углового вектора на плоскость, которая перпендикулярна к плоскости, в которой он находится – равна нулю.

Графически угловой вектор можно представить, как площадь какой-то фигуры (для крутящего момента – площадь параллелограмма).

В системе координат, кроме прямолинейного положительного направления (координатные оси), нужно указывать еще и угловые положительные направления, рис.5. Например, в виде изогнутых стрелок в каждой плоскости. При описании положительное угловое направление указывается от одной оси координат к другой. Например, для рис. 5(б) положительное угловое направление между осями направлены: $Ox \rightarrow Oy \rightarrow Oz$.

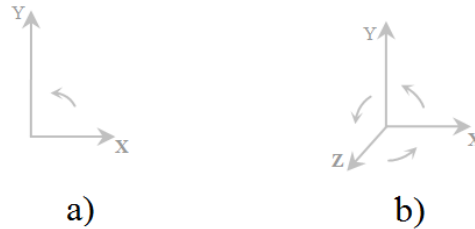


Рис. 5: Определение углового направления в системе координат

Введение углового направления в системе координат, позволяет задавать положительное направление проекций угловых векторов в координатных плоскостях.

В обозначении проекций угловых векторов на координатные плоскости, порядок расположения индексов указывает на их угловое направление. Так для проекции вектора b_{xy} положительное направление в координатных осях будет $Ox \rightarrow Oy$. Тогда

$$b_{xy} = -b_{yx} \quad b_{yz} = -b_{zy} \quad b_{zx} = -b_{xz} \quad (4)$$

Модуль углового вектора находится, так же как и для прямолинейного вектора

$$|\hat{b}| = \sqrt{b_{xy}^2 + b_{yz}^2 + b_{zx}^2} \quad (5)$$

Единичные угловые векторы (базисы), так же как и прямолинейные базисы отражают положительное направление в выбранной системе координат, рис.6.

В данной работе условно примем названия угловых базисов, которые принадлежат плоскостям: $\hat{l} \in OXY()$, $\hat{m} \in OYZ$, $\hat{n} \in OZX$

Прямолинейные базисы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — задают масштаб системы координат и характеризуют её тип.

Угловые базисы $\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}$ — показывают только положительное угловое направление в координатных плоскостях, их размер зависит от размера прямолинейных базисов (более подробно в векторном произведении векторов).

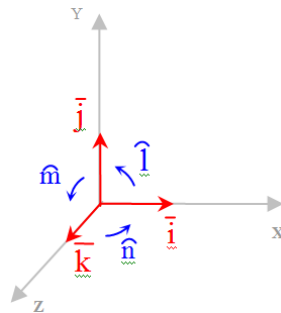


Рис. 6: Угловые базисы в системе координат

Рассмотрим основные математические операции над угловыми векторами:

2.2 Сложение векторов

Данная операция возможна только среди однотипных векторов. Она одинакова как для прямолинейных, так и для угловых векторов. Единственным их отличием является то, что сложение угловых векторов нельзя представить графически, потому что угловые векторы выглядят как площади каких-то фигур.

Сумма векторов равна сумме их проекций:

$$\hat{a} + \hat{b} = \hat{c} \quad \hat{a} + \hat{b} = (a_{xy} + b_{xy}, a_{yz} + b_{yz}, a_{zx} + b_{zx}) \quad (6)$$

$$\text{Все векторы подчиняются свойству ассоциативности } (\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) \quad (7)$$

$$\text{Все векторы подчиняются свойству коммутативности } \hat{a} + \hat{b} = \hat{b} + \hat{a} \quad (8)$$

$$\text{Для любого вектора } \hat{a} \text{ существует противоположный вектор } -\hat{a}, \text{ такой что } \hat{a} + (-\hat{a}) = 0 \quad (9)$$

Частные случаи сложения угловых векторов:

Угловой вектор можно представить, как сумму векторов, которые находятся в плоскостях системы координат

$$\hat{b}(b_{xy}, b_{yz}, b_{zx}) = \hat{c}(b_{xy}, 0, 0) + \hat{d}(0, b_{yz}, 0) + \hat{t}(0, 0, b_{zx}) \quad (10)$$

Угловой вектор можно представить, как сумму векторов, каждый из которых перпендикулярен одной из плоскостей координат. При этом исходный вектор в два раза больше получаемых векторов.

$$2\hat{b}(2b_{xy}, 2b_{yz}, 2b_{zx}) = \hat{c}(b_{xy}, b_{yz}, 0) + \hat{d}(0, b_{yz}, b_{zx}) + \hat{t}(b_{xy}, 0, b_{zx}) \quad (11)$$

$$2\hat{b}(2b_{xy}, 2b_{yz}, 2b_{zx}) = \hat{c}(2b_{xy}, b_{yz}, 0) + \hat{d}(0, b_{yz}, 2b_{zx}) \quad (12)$$

$$2\hat{b}(2b_{xy}, 2b_{yz}, 2b_{zx}) = \hat{d}(0, 2b_{yz}, b_{zx}) + \hat{t}(2b_{xy}, 0, b_{zx}) \quad (13)$$

$$2\hat{b}(2b_{xy}, 2b_{yz}, 2b_{zx}) = \hat{c}(b_{xy}, 2b_{yz}, 0) + \hat{t}(b_{xy}, 0, 2b_{zx}) \quad (14)$$

2.3 Углы между плоскостью углового вектора и плоскостями системы координат

Угловой вектор образует со своими координатными проекциями углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$\begin{cases} b_{xy} = |\hat{b}| \cdot \cos(\varphi_1) \\ b_{yz} = |\hat{b}| \cdot \cos(\varphi_2) \\ b_{zx} = |\hat{b}| \cdot \cos(\varphi_3) \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \arccos \left(\frac{b_{xy}}{\sqrt{b_{xy}^2 + b_{yz}^2 + b_{zx}^2}} \right) \\ \varphi_2 = \arccos \left(\frac{b_{yz}}{\sqrt{b_{xy}^2 + b_{yz}^2 + b_{zx}^2}} \right) \\ \varphi_3 = \arccos \left(\frac{b_{zx}}{\sqrt{b_{xy}^2 + b_{yz}^2 + b_{zx}^2}} \right) \end{cases} \quad (15)$$

2.4 Обратный вектор

Обратным называется вектор $\bar{a}'$, который сонаправлен с вектором $\bar{a}$, и отличается от него размером, рис.7.

$$|\bar{a}'| = \frac{1}{|\bar{a}|} \quad (16)$$

Проекции на оси прямолинейного вектора равны:

$$a'_x = a_x \frac{|\bar{a}'|}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{|\bar{a}|^2} = \frac{a_x}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2} = \frac{a_x}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad a'_y = \frac{a_y}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad a'_z = \frac{a_z}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (17)$$

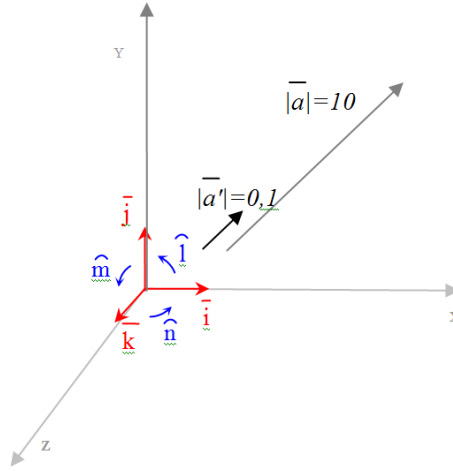


Рис. 7: Прямолинейный обратный вектор

Данные зависимости, также справедливы и для углового обратного вектора:

$$|\hat{a}'| = \frac{1}{|\hat{a}|} \quad (18)$$

$$a'_{xy} = \frac{a_{xy}}{a_{xy}^2 + a_{yz}^2 + a_{zx}^2}, \quad a'_{yz} = \frac{a_{yz}}{a_{xy}^2 + a_{yz}^2 + a_{zx}^2}, \quad a'_{zx} = \frac{a_{zx}}{a_{xy}^2 + a_{yz}^2 + a_{zx}^2} \quad (19)$$

2.5 Умножение вектора на скаляр

Если все векторы в уравнении одного типа (прямолинейные или угловые), то при умножении вектора на скаляр, умножаются на скаляр все его проекции

$$n\bar{a}(na_x, na_y, na_z) \quad n\hat{b}(nb_{xy}, nb_{yz}, nb_{zx}) \quad (20)$$

$$\text{Для всех векторов умножение на единицу не меняет вектора} \quad 1 \cdot \hat{b} = \hat{b} \quad (21)$$

$$\text{Все векторы подчиняются свойству ассоциативности} \quad \lambda(\mu\hat{b}) = (\lambda\mu)\hat{b} \quad (22)$$

$$\text{Все векторы подчиняются свойству дистрибутивности} \quad (\lambda + \mu)\hat{b} = \lambda\hat{b} + \mu\hat{b} \quad (23)$$

$$\text{Дистрибутивность относительно сложения векторов} \quad \lambda(\hat{a} + \hat{b}) = \lambda\hat{a} + \lambda\hat{b} \quad (24)$$

2.6 Скалярное произведение векторов

С физической точки зрения, скалярное произведение – это образование новой физической величины без направления. Например:

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ - мощность равна произведению силы на скорость

$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$ - мощность равна произведению крутящего момента на угловую скорость

Основой скалярного произведения, является произведение двух параллельных векторов. И участвует в произведении только та часть первого вектора, которая может быть представлена параллельной ко второму вектору (проекция первого вектора на второй вектор). Или наоборот.

Скалярным произведением двух угловых векторов, является число (скаляр), равное произведению величины угловых векторов на косинус угла между плоскостями, в которых находятся угловые векторы.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}_a = \vec{b} \cdot \vec{a}_b \quad - \text{ в векторном виде} \quad (25)$$

Выведем скалярное произведение углового вектора в координатно-векторном виде:

Так как произведения единичных векторов в скалярном произведении

$$\hat{l} \cdot \hat{l} = 1, \hat{l} \cdot \hat{m} = 0, \hat{m} \cdot \hat{n} = 0, \hat{n} \cdot \hat{l} = 0, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_{xy}\hat{l} + a_{yz}\hat{m} + a_{zx}\hat{n}) \cdot (b_{xy}\hat{l} + b_{yz}\hat{m} + b_{zx}\hat{n}) = \\ &= a_{xy}b_{xy}(\hat{l} \cdot \hat{l}) + a_{xy}b_{yz}(\hat{l} \cdot \hat{m}) + a_{xy}b_{zx}(\hat{l} \cdot \hat{n}) + a_{yz}b_{xy}(\hat{m} \cdot \hat{l}) + a_{yz}b_{yz}(\hat{m} \cdot \hat{m}) + \\ &+ a_{yz}b_{zx}(\hat{m} \cdot \hat{n}) + a_{zx}b_{xy}(\hat{n} \cdot \hat{l}) + a_{zx}b_{yz}(\hat{n} \cdot \hat{m}) + a_{zx}b_{zx}(\hat{n} \cdot \hat{n}) = a_{xy}b_{xy} + a_{yz}b_{yz} + a_{zx}b_{zx} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_{xy}b_{xy} + a_{yz}b_{yz} + a_{zx}b_{zx} \end{aligned} \quad (26)$$

Следует отметить, что скаляр хоть и не обладает направлением, он может быть как положительным, так и отрицательным. И знак скаляра обозначает не направление физической величины, а её состояние (как для прямолинейных, так и для угловых величин).

Например: $P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = (-10 \cdot 100) + (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = -1000 \text{ (W)}$

Это мощность тормозного механизма (или генератора). Он создает тормозящий крутящий момент на валу $\vec{M} = (-10, 0, 0)$ (Нм), который вращается с угловой скоростью $\vec{\omega} = (100, 0, 0)$ (рад/с). Отрицательную мощность еще можно назвать мощностью сопротивления.

2.7 Векторное произведение векторов

Математика является универсальной дисциплиной, в которой одно и то же уравнение можно по-разному объяснить и применить. Покажем это на нижеописанных свойствах векторов.

Основой векторного произведения, является произведение двух перпендикулярных векторов. И участвуют в произведении только та часть первого вектора, которая может быть представлена перпендикулярной ко второму вектору (и наоборот), (Wilson, Edwin Bidwell, 1901. р. 61).

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot b_{pl \perp \vec{a}} = a_{pl \perp \vec{b}} \cdot \vec{b} \quad (27)$$

$b_{pl \perp \vec{a}}$ - проекция вектора $\vec{b}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$

Результатом векторного произведения векторов является образование нового вектора (новой физической величины). Рассмотрим 4 варианта векторных произведений.

Также необходимо помнить, что выбранная система координат влияет на направление прямолинейных и угловых векторов, соответственно она влияет и на выводимые формулы. Перечислим эти варианты с участием единичных векторов (ортов), для системы координат на рис. 6, с положительным угловым направлением в координатных плоскостях $Ox \rightarrow Oy \rightarrow Oz$ (против часовой стрелки):

1. Векторное произведение двух прямолинейных векторов. Результатом является прямолинейный вектор, расположенный перпендикулярно к исходящим векторам и направленный по правилу правой руки (вдоль оси z, рис 6.).

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} \quad (28)$$

2. Векторное произведение двух прямолинейных векторов. Результатом является угловой вектор, расположенный в плоскости, образованной прямолинейными исходящими векторами, и направленный против часовой стрелки.

$$\bar{i} \times \bar{j} = \hat{l}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \hat{m}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \hat{n} \quad (29)$$

3. Векторное произведение двух угловых векторов. Результатом является угловой вектор, расположенный в плоскости перпендикулярной к плоскостям исходящих угловых векторов, и направленный против часовой стрелки.

$$\hat{l} \times \hat{m} = \hat{n}, \quad \hat{m} \times \hat{n} = \hat{l}, \quad \hat{n} \times \hat{l} = \hat{m} \quad (30)$$

4. Векторное произведение двух угловых векторов. Результатом является прямолинейный вектор, расположенный на линии пересечения исходящих плоскостей угловых векторов, с положительным направлением касания плоскости второго углового вектора в уравнении, к линии пересечения.

$$\hat{l} \times \hat{m} = \bar{j}, \quad \hat{m} \times \hat{n} = \bar{k}, \quad \hat{n} \times \hat{l} = \bar{i} \quad (31)$$

Рассмотрим каждый из вариантов векторных произведений и представим их в координатно-векторном виде:

1. $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$ - векторное произведение двух прямолинейных векторов. Результатом является прямолинейный вектор.

Данное векторное произведение хорошо всем известно, но для сравнения его с другими векторными произведениями, мы его тоже рассмотрим.

Найдем распределение результирующего прямолинейного вектора на координатные оси:

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \bar{c} \times \bar{d} = (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) \times (d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}) = \\ &= c_x d_x (\bar{i} \times \bar{i}) + c_x d_y (\bar{i} \times \bar{j}) + c_x d_z (\bar{i} \times \bar{k}) + c_y d_x (\bar{j} \times \bar{i}) + c_y d_y (\bar{j} \times \bar{j}) + c_y d_z (\bar{j} \times \bar{k}) + \\ &+ c_z d_x (\bar{k} \times \bar{i}) + c_z d_y (\bar{k} \times \bar{j}) + c_z d_z (\bar{k} \times \bar{k}) = 0 + c_x d_y (\bar{k}) - c_x d_z (\bar{j}) - c_y d_x (\bar{k}) + 0 + c_y d_z (\bar{i}) + \\ &+ c_z d_x (\bar{j}) - c_z d_y (\bar{i}) + 0 = (c_y d_z - c_z d_y) \bar{i} + (c_z d_x - c_x d_z) \bar{j} + (c_x d_y - c_y d_x) \bar{k} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k} \\ b_x &= c_y d_z - c_z d_y, \quad b_y = c_z d_x - c_x d_z, \quad b_z = c_x d_y - c_y d_x \end{aligned} \quad (32)$$

2. $\bar{i} \times \bar{j} = \hat{l}$, $\bar{j} \times \bar{k} = \hat{m}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \hat{n}$ - векторным произведением двух прямолинейных векторов является угловой вектор.

Найдем распределение результирующего углового вектора на координатные плоскости (представим его в координатно-векторном виде),

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \bar{c} \times \bar{d} = (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) \times (d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}) = \\ &= c_x d_x (\bar{i} \times \bar{i}) + c_x d_y (\bar{i} \times \bar{j}) + c_x d_z (\bar{i} \times \bar{k}) + c_y d_x (\bar{j} \times \bar{i}) + c_y d_y (\bar{j} \times \bar{j}) + c_y d_z (\bar{j} \times \bar{k}) + \\ &+ c_z d_x (\bar{k} \times \bar{i}) + c_z d_y (\bar{k} \times \bar{j}) + c_z d_z (\bar{k} \times \bar{k}) = 0 + c_x d_y (\hat{l}) - c_x d_z (\hat{n}) - c_y d_x (\hat{l}) + 0 + c_y d_z (\hat{m}) + \\ &+ c_z d_x (\hat{n}) - c_z d_y (\hat{m}) + 0 = (c_x d_y - c_y d_x) \hat{l} + (c_y d_z - c_z d_y) \hat{m} + (c_z d_x - c_x d_z) \hat{n} = b_{xy} \hat{l} + b_{yz} \hat{m} + b_{zx} \hat{n} \end{aligned}$$

$$b_{xy} = c_x d_y - c_y d_x, \quad b_{yz} = c_y d_z - c_z d_y, \quad b_{zx} = c_z d_x - c_x d_z \quad (33)$$

3. $\hat{l} \times \hat{m} = \hat{n}$, $\hat{m} \times \hat{n} = \hat{l}$, $\hat{n} \times \hat{l} = \hat{m}$ - векторным произведением двух угловых векторов, является третий угловой вектор, который перпендикулярен к исходящим векторам.

Найдем распределение результирующего углового вектора на координатные плоскости,

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \hat{c} \times \hat{d} = (c_{xy}\hat{l} + c_{yz}\hat{m} + c_{zx}\hat{n}) \times (d_{xy}\hat{l} + d_{yz}\hat{m} + d_{zx}\hat{n}) = \\ &= c_{xy}d_{xy}(\hat{l} \times \hat{l}) + c_{xy}d_{yz}(\hat{l} \times \hat{m}) + c_{xy}d_{zx}(\hat{l} \times \hat{n}) + c_{yz}d_{xy}(\hat{m} \times \hat{l}) + c_{yz}d_{yz}(\hat{m} \times \hat{m}) + \\ &+ c_{yz}d_{zx}(\hat{m} \times \hat{n}) + c_{zx}d_{xy}(\hat{n} \times \hat{l}) + c_{zx}d_{yz}(\hat{n} \times \hat{m}) + c_{zx}d_{zx}(\hat{n} \times \hat{n}) = 0 + c_{xy}d_{yz}(\hat{n}) - \\ &- c_{xy}d_{zx}(\hat{m}) - c_{yz}d_{xy}(\hat{n}) + 0 + c_{yz}d_{zx}(\hat{l}) + c_{zx}d_{xy}(\hat{m}) - c_{zx}d_{yz}(\hat{l}) + 0 = \\ &= (c_{yz}d_{zx} - c_{zx}d_{yz})\hat{l} + (c_{zx}d_{xy} - c_{xy}d_{zx})\hat{m} + (c_{xy}d_{yz} - c_{yz}d_{xy})\hat{n} = b_{xy}\hat{l} + b_{yz}\hat{m} + b_{zx}\hat{n} \\ b_{xy} &= c_{yz}d_{zx} - c_{zx}d_{yz}, \quad b_{yz} = c_{zx}d_{xy} - c_{xy}d_{zx}, \quad b_{zx} = c_{xy}d_{yz} - c_{yz}d_{xy} \end{aligned} \quad (34)$$

4. $\hat{l} \times \hat{m} = \bar{j}$, $\hat{m} \times \hat{n} = \bar{k}$, $\hat{n} \times \hat{l} = \bar{i}$ - векторным произведением двух угловых векторов, является прямолинейный вектор.

Найдем распределение результирующего углового вектора на координатные оси,

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \bar{c} \times \bar{d} = (c_{xy}\hat{l} + c_{yz}\hat{m} + c_{zx}\hat{n}) \times (d_{xy}\hat{l} + d_{yz}\hat{m} + d_{zx}\hat{n}) = \\ &= c_{xy}d_{xy}(\hat{l} \times \hat{l}) + c_{xy}d_{yz}(\hat{l} \times \hat{m}) + c_{xy}d_{zx}(\hat{l} \times \hat{n}) + c_{yz}d_{xy}(\hat{m} \times \hat{l}) + c_{yz}d_{yz}(\hat{m} \times \hat{m}) + \\ &+ c_{yz}d_{zx}(\hat{m} \times \hat{n}) + c_{zx}d_{xy}(\hat{n} \times \hat{l}) + c_{zx}d_{yz}(\hat{n} \times \hat{m}) + c_{zx}d_{zx}(\hat{n} \times \hat{n}) = 0 + c_{xy}d_{yz}(\bar{j}) - \\ &- c_{xy}d_{zx}(\bar{i}) - c_{yz}d_{xy}(\bar{j}) + 0 + c_{yz}d_{zx}(\bar{k}) + c_{zx}d_{xy}(\bar{i}) - c_{zx}d_{yz}(\bar{k}) + 0 = \\ &= (c_{zx}d_{xy} - c_{xy}d_{zx})\bar{i} + (c_{xy}d_{yz} - c_{yz}d_{xy})\bar{j} + (c_{yz}d_{zx} - c_{zx}d_{yz})\bar{k} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} \\ b_x &= c_{zx}d_{xy} - c_{xy}d_{zx}, \quad b_y = c_{xy}d_{yz} - c_{yz}d_{xy}, \quad b_z = c_{yz}d_{zx} - c_{zx}d_{yz} \end{aligned} \quad (35)$$

Напомним, что векторное произведение однотипных векторов, антикоммутирует

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \\ \bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \\ \bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \\ \bar{c} &= \bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \end{aligned} \quad (36)$$

Какие же из этих уравнений имеют право на существование?

Для этого рассмотрим два примера, которые покажут что векторные произведения $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\hat{l} \times \hat{m} = \hat{n}$ не могут существовать.

Пример 3: Пусть нам известен модуль прямолинейного вектора $|\bar{a}| = 15$ и две его проекции на оси координат $\bar{a}(10, 10, a_z)$, рис.8(сам вектор $\bar{a}$ не показан). Необходимо найти его третью проекцию.

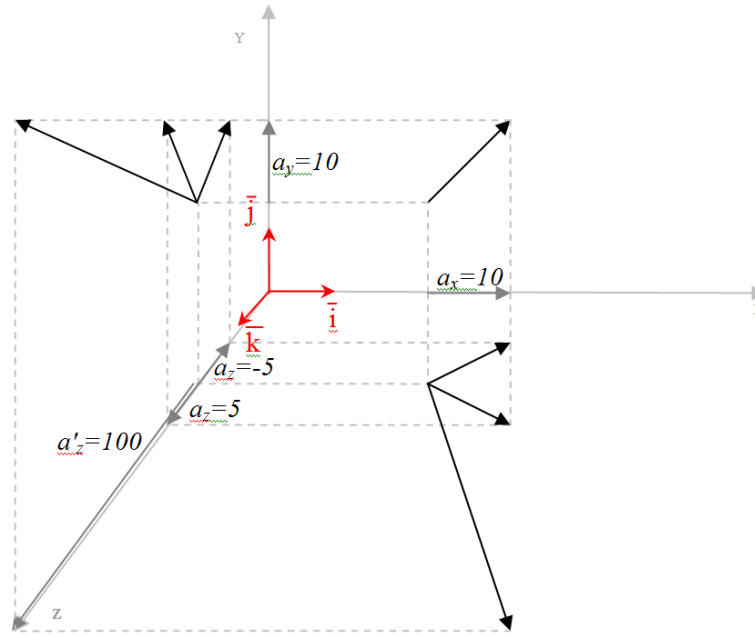


Рис. 8: Проекция прямолинейного вектора в плоскостях и на осях

Решение:

Используя формулу $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, проекция вектора равна

$$a_z = \sqrt{15^2 - 10^2 - 10^2} = \pm 5$$

Более точно сказать, в какую сторону направлена проекция вектора на оси Oz мы не можем.

Теперь представим наш вектор как сумму координатных векторов.

$$\vec{a}(a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z, \quad \text{then} \quad \vec{a}_x = a_x, \quad \vec{a}_y = a_y, \quad \vec{a}_z = a_z$$

и используя формулу $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (32), найдем проекцию вектора a_z , назвав её a'_z

$$\vec{a}'_z = \vec{a}_x \times \vec{a}_y = (a_x \vec{i} + 0 + 0) \times (0 + a_y \vec{j} + 0) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (a_x a_y - 0)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$a'_z = a_x a_y = 10 \cdot 10 = 100$$

Вывод: проекция прямолинейного вектора a'_z найденная вторым методом:

1. не согласуется с проекцией вектора a_z , найденной первым методом, $a_z \neq a'_z$
2. не согласуется с модулем заданного вектора, если найти модуль, используя a'_z
3. задает только положительное направление, хотя направление точно не определено и может быть как положительным, так и отрицательным в оси Oz.

Таким образом, векторное произведение $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ не согласуется с другими свойствами прямолинейных векторов (разложением вектора на сумму векторов), и не имеет право на существование.

Аналогично данному примеру можно доказать, что векторное произведение $\vec{l} \times \vec{m} = \vec{n}$ тоже не существует.

Пример 4: Стоит обратить внимание еще на одну проблему – логическая несостоятельность векторного произведения векторов $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

При векторном произведении двух прямолинейных векторов, образуется новый прямолинейный вектор, перпендикулярный к обоим исходным векторам $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}$.

Логично было бы, если бы $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{c} = \vec{d} \times \vec{b}$. То есть, зная любые два вектора, можно было бы найти третий вектор. Но этого не наблюдается (наблюдается, только если векторы представить как единичные).

Например, если известны два прямолинейных вектора $\bar{b}(10, 0, 0)$, $\bar{c}(0, 10, 0)$, то

$$\bar{d} = \bar{b} \times \bar{c} = (b_y c_z - b_z c_y) \bar{i} + (b_z c_x - b_x c_z) \bar{j} + (b_x c_y - b_y c_x) \bar{k} = d_x \bar{i} + d_y \bar{j} + d_z \bar{k}$$

$$\vec{d} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 10)\vec{i} + (0 \cdot 0 - 10 \cdot 0)\vec{j} + (10 \cdot 10 - 0 \cdot 0)\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 100\vec{k}$$

$d_x = 0, d_y = 0, d_z = 100$, то есть вектор $\bar{d}(0, 0, 100)$

Теперь найдем заново вектор $\bar{b}$, и сравним его с исходным вектором

$$\bar{b} = \bar{c} \times \bar{d} = (c_y d_z - c_z d_y) \bar{i} + (c_z d_x - c_x d_z) \bar{j} + (c_x d_y - c_y d_x) \bar{k} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$$

$$\bar{b} = (10 \cdot 100 - 0 \cdot 0)\bar{i} + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 100)\bar{j} + (0 \cdot 0 - 10 \cdot 0)\bar{k} = 1000\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$b_x = 1000, b_y = 0, b_z = 0$, то есть вектор $\bar{b}(1000, 0, 0)$, и совсем не равен исходному вектору.

Данное замечание справедливо и для векторного произведения угловых векторов $\hat{a} = \hat{b} \times \hat{c}$, в результате которого образуется третий угловой вектор.

Рассмотрим следующий пример, который покажет, что векторное произведение $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{l}$ имеет право на существование.

Пример 5:

Пусть нам даны два прямолинейных вектора $\bar{a}(3, -4, 5), \bar{b}(-5, 2, -8)$, рис.9.

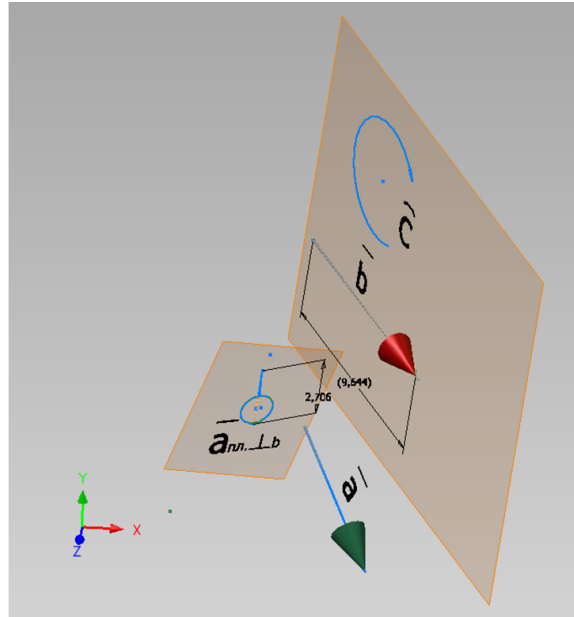


Рис. 9: Прямолинейные и угловой векторы в системе координат

Найдем угловой вектор $\hat{c}$, образованный этими прямолинейными векторами (33):

$$\hat{c} = \bar{a} \times \bar{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \hat{l} + (a_y b_z - a_z b_y) \hat{m} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{n} = c_{xy} \hat{l} + c_{yz} \hat{m} + c_{zx} \hat{n}$$

$$c_{xy} = a_x b_y - a_y b_x = 3 \cdot 2 - (-4) \cdot (-5) = -14$$

$$c_{yz} = a_y b_z - a_z b_y = (-4) \cdot (-8) - 5 \cdot 2 = 22$$

$$c_{zx} = a_z b_x - a_x b_z = 5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-8) = -1$$

$$\hat{c}(-14, 22, -1)$$

Тогда модуль углового вектора

$$|\hat{c}| = \sqrt{c_{xy}^2 + c_{yz}^2 + c_{zx}^2} = \sqrt{(-14)^2 + (22)^2 + (-1)^2} = \sqrt{196 + 484 + 1} = 26,09$$

Найдем этот модуль другим способом, для этого найдем сначала модули прямолинейных векторов:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = 7,071$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 4 + 64} = 9,64$$

Так как угловой вектор, это векторное произведение двух перпендикулярных прямолинейных векторов, представим вектор $\bar{a}$, как проекцию на плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{b}$, рис. 9, и с помощью программы Autodesk Inventor, найдем величину проекции вектора $a_{pl\perp\bar{b}} = 2,706$.

Тогда модуль углового вектора $|\hat{c}| = |\bar{b}| \cdot |a_{pl\perp\bar{b}}| = 9,64 \cdot 2,706 = 26,085$

В данном уравнении все взято по модулю, так как угловой вектор $\hat{c}$ находится в пространстве, и мы не можем знать его направление. Направление углового вектора определяют через его проекции на координатные плоскости $\hat{c}(c_{xy}, c_{yz}, c_{zx})$, потому что направление векторов задает только система координат.

Если совместить конец проекции вектора $a_{pl\perp\bar{b}}$ с началом вектора $\bar{b}$, то эти прямые образуют плоскость (назовем её первой плоскостью $pl.(1)\hat{c}$) в которой находится угловой вектор $\hat{c}$.

Если мы наоборот, найдем проекцию вектора $b_{pl\perp\bar{a}} = 3,691$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\bar{a}$, то угловой вектор

$$|\hat{c}| = |\bar{a}| \cdot |b_{pl\perp\bar{a}}| = 7,071 \cdot 3,691 = 26,099.$$

Плоскость углового вектора $\hat{c}$ так же можно построить из прямых вектора $\bar{a}$, и проекции вектора $b_{pl\perp\bar{a}}$ на перпендикулярную плоскость. Назовем её второй плоскостью углового вектора $pl.(2)\hat{c}$.

Анализируя эти плоскости, можно сказать, что они параллельные. И это логично, потому, что угловой вектор может быть одним из множества параллельных, одинаково направленных векторов.

Вывод: модуль углового вектора $|\hat{c}|$, найденный двумя способами совпадает (с учетом погрешности используемой программы Autodesk Inventor).

Рассмотрим два примера, когда векторное произведение $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{l}$ наблюдается в природе.

Пример 6:

Найдем разложение крутящего момента на координатных плоскостях. При положительном угловом направлении крутящего момента в осях $Ox \rightarrow Oy \rightarrow Oz$:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{l}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{m}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{n}$$

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \bar{h} \times \bar{F} = (h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k}) \times (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \\ &= h_x F_x (\vec{i} \times \vec{i}) + h_x F_y (\vec{i} \times \vec{j}) + h_x F_z (\vec{i} \times \vec{k}) + h_y F_x (\vec{j} \times \vec{i}) + h_y F_y (\vec{j} \times \vec{j}) + h_y F_z (\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &+ h_z F_x (\vec{k} \times \vec{i}) + h_z F_y (\vec{k} \times \vec{j}) + h_z F_z (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + h_x F_y (\vec{l}) - h_x F_z (\vec{n}) - h_y F_x (\vec{l}) + 0 + h_y F_z (\vec{m}) + \\ &+ h_z F_x (\vec{n}) - h_z F_y (\vec{m}) + 0 = (h_x F_y - h_y F_x) \vec{l} + (h_y F_z - h_z F_y) \vec{m} + (h_z F_x - h_x F_z) \vec{n} = \\ &= M_{xy} \vec{l} + M_{yz} \vec{m} + M_{zx} \vec{n} \end{aligned}$$

, откуда

$$M_{xy} = h_x F_y - h_y F_x, \quad M_{yz} = h_y F_z - h_z F_y, \quad M_{zx} = h_z F_x - h_x F_z \quad (37)$$

Вывод: в данном векторном произведении прямолинейные векторы расстояния и силы, находятся в одной плоскости с угловым вектором крутящего момента. Их направления и величина согласованы с физическими величинами.

Пример 7: Найдем разложение угловой скорости на координатных плоскостях.

При положительном угловом направлении крутящего момента в осях $Ox \rightarrow Oy \rightarrow Oz$:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{l}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{m}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{n}$$

Преобразуем уравнение нахождения касательной скорости $\bar{v} = \bar{r} \times \bar{\omega}$, в уравнение нахождения угловой скорости $\frac{1}{\bar{r}} \times \bar{v} = \bar{\omega}$

Прямолинейный вектор расстояния представлен, как обратный вектор в векторном произведении, тогда

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{1}{\bar{r}} \times \bar{v} = \bar{r}' \times \bar{v} = (r'_x \bar{i} + r'_y \bar{j} + r'_z \bar{k}) \times (v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}) = \\ &= r'_x v_x (\bar{i} \times \bar{i}) + r'_x v_y (\bar{i} \times \bar{j}) + r'_x v_z (\bar{i} \times \bar{k}) + r'_y v_x (\bar{j} \times \bar{i}) + r'_y v_y (\bar{j} \times \bar{j}) + r'_y v_z (\bar{j} \times \bar{k}) + r'_z v_x (\bar{k} \times \bar{i}) + r'_z v_y (\bar{k} \times \bar{j}) + r'_z v_z (\bar{k} \times \bar{k}) = \\ &= 0 + r'_x v_y (\bar{l}) - r'_x v_z (\bar{n}) - r'_y v_x (\bar{l}) + 0 + r'_y v_z (\bar{m}) + r'_z v_x (\bar{n}) - r'_z v_y (\bar{m}) + 0 = (r'_x v_y - r'_y v_x) \bar{l} + (r'_y v_z - r'_z v_y) \bar{m} + (r'_z v_x - r'_x v_z) \bar{n} = \\ &= \left(\frac{r_x v_y}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_y v_x}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right) \bar{l} + \left(\frac{r_y v_z}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_z v_y}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right) \bar{m} + \left(\frac{r_z v_x}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} - \frac{r_x v_z}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right) \bar{n} = \\ &= \left(\frac{r_x v_y - r_y v_x}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right) \bar{l} + \left(\frac{r_y v_z - r_z v_y}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right) \bar{m} + \left(\frac{r_z v_x - r_x v_z}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right) \bar{n} = w_{xy} \bar{l} + w_{yz} \bar{m} + w_{zx} \bar{n} \end{aligned}$$

, откуда

$$w_{xy} = \frac{r_x v_y - r_y v_x}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}, \quad w_{yz} = \frac{r_y v_z - r_z v_y}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}, \quad w_{zx} = \frac{r_z v_x - r_x v_z}{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (38)$$

Вывод: в данном векторном произведении прямолинейные векторы расстояния и касательной скорости находятся в одной плоскости с вектором угловой скорости. Их направления и величина согласованы с физическими величинами.

Теперь докажем что векторного произведения $\bar{l} \times \bar{m} = \bar{j}$, в котором образуется прямолинейный вектор из двух угловых, не существует.

Пример 8: Пусть нам даны три прямолинейных вектора $\bar{a}(10, 0, 0)$, $\bar{b}(0, 10, 0)$, $\bar{c}(0, 0, 10)$, рис. 10. Найдем угловые векторы, образованные из этих прямолинейных векторов в плоскости θXY , θYZ .

$$\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b} = (a_x b_y - a_y b_x) \bar{l} + (a_y b_z - a_z b_y) \bar{m} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{n} = d_{xy} \bar{l} + d_{yz} \bar{m} + d_{zx} \bar{n}$$

$$\bar{d} = (10 \cdot 10 - 0 \cdot 0) \bar{l} + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 10) \bar{m} + (0 \cdot 0 - 10 \cdot 0) \bar{n} = 100 \bar{l} + 0 \bar{m} + 0 \bar{n}$$

$$\bar{d}(100, 0, 0)$$

$$\bar{t} = \bar{b} \times \bar{c} = (b_x c_y - b_y c_x) \bar{l} + (b_y c_z - b_z c_y) \bar{m} + (b_z c_x - b_x c_z) \bar{n} = t_{xy} \bar{l} + t_{yz} \bar{m} + t_{zx} \bar{n}$$

$$\bar{t} = (0 \cdot 0 - 10 \cdot 0) \bar{l} + (10 \cdot 10 - 0 \cdot 0) \bar{m} + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 10) \bar{n} = 0 \bar{l} + 100 \bar{m} + 0 \bar{n}$$

$$\bar{t}(0, 100, 0)$$

Найдем прямолинейный вектор $\bar{b}'$ из угловых векторов $\bar{d}$, $\bar{t}$ и сравним его с заданным вектором $\bar{b}$.

$$\bar{b}' = \bar{d} \times \bar{t} = (d_{zx} t_{xy} - d_{xy} t_{zx}) \bar{i} + (d_{xy} t_{yz} - d_{yz} t_{xy}) \bar{j} + (d_{yz} t_{zx} - d_{zx} t_{yz}) \bar{k} = b'_x \bar{i} + b'_y \bar{j} + b'_z \bar{k}$$

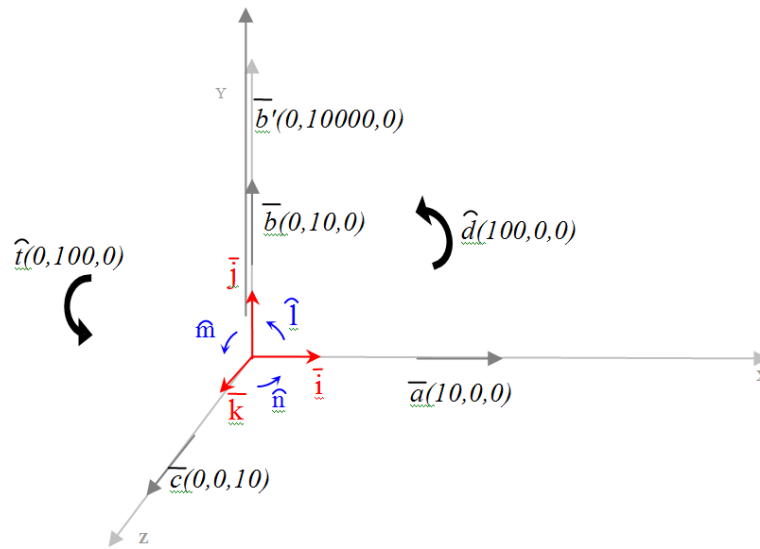


Рис. 10: Прямолинейные и угловые векторы в системе координат

$$\bar{b}' = (0 \cdot 0 - 100 \cdot 0)\bar{i} + (100 \cdot 100 - 0 \cdot 0)\bar{j} + (0 \cdot 0 - 0 \cdot 100)\bar{k} = 0\bar{i} + 10000\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\bar{b}'(0, 10000, 0)$$

Так как векторы $\bar{b} \neq \bar{b}'$ не равны, то векторное произведение $\hat{l} \times \hat{m} = \bar{j}$ не может существовать.

Общий вывод векторных произведений векторов: в данном типе произведения возможен только один вариант, когда при векторном произведении двух прямолинейных векторов, образуется угловой вектор $\bar{i} \times \bar{j} = \hat{l}$.

Доказательство данного утверждения:

1. Прямолинейные и угловой векторы лежат в одной плоскости, что является первой необходимой, но не достаточной связью прямолинейных и угловых векторов.
2. Величина векторного произведения прямолинейных векторов равняется площади фигуры, а величина углового вектора по определению равна площади фигуры.
3. Величина векторного произведения прямолинейных векторов совпадает с величиной углового вектора. Это является следствием наблюдения при образовании угловых физических величин (крутящего момента, угловой скорости).
4. Из векторного произведения прямолинейных векторов можно вывести всего два направления (+,-). Угловой вектор тоже обладает всего двумя направлениями.
5. Порядок следования прямолинейных векторов в векторном произведении однозначно определяет направление углового вектора на плоскости

2.8 Скалярное произведение смешанных векторов

Скалярным произведением углового и прямолинейного векторов, является число (скаляр), равное произведению величин этих векторов на косинус наименьшего угла, образованного плоскостью, в которой находится угловой вектор, и прямой прямолинейного вектора. Если оба вектора находятся в одной плоскости, то скаляр равен произведению их величин.

$$\bar{a} \cdot \hat{b} = |\bar{a}| \cdot |\hat{b}| \cdot |\cos(\bar{a}, \hat{b})| = |a_b| \cdot |\hat{b}| \quad - \text{ в векторном виде}$$

В данном выражении скаляр теряет свой знак и может быть только положительным.

Потому что проекция прямолинейного вектора на плоскости не определяет его направления относительно углового вектора, находящегося в этой плоскости.

Выведем данное уравнение в координатно-векторном виде.

Так как произведения единичных векторов при скалярном произведении

$$\begin{aligned}\bar{i} \cdot \bar{i} &= 1, & \bar{j} \cdot \bar{j} &= 1, & \bar{k} \cdot \bar{k} &= 1, \\ \bar{i} \cdot \bar{j} &= 0, & \bar{j} \cdot \bar{k} &= 0, & \bar{k} \cdot \bar{i} &= 0, \\ \bar{i} \cdot \bar{l} &= 1, & \bar{j} \cdot \bar{l} &= 1, & \bar{k} \cdot \bar{l} &= 0, \\ \bar{j} \cdot \bar{m} &= 1, & \bar{k} \cdot \bar{m} &= 1, & \bar{i} \cdot \bar{m} &= 0, \\ \bar{k} \cdot \bar{n} &= 1, & \bar{i} \cdot \bar{n} &= 1, & \bar{j} \cdot \bar{n} &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c &= \bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_{xy} \bar{l} + b_{yz} \bar{m} + b_{zx} \bar{n}) = \\ &= a_x b_{xy} (\bar{i} \cdot \bar{l}) + a_x b_{yz} (\bar{i} \cdot \bar{m}) + a_x b_{zx} (\bar{i} \cdot \bar{n}) + a_y b_{xy} (\bar{j} \cdot \bar{l}) + a_y b_{yz} (\bar{j} \cdot \bar{m}) + a_y b_{zx} (\bar{j} \cdot \bar{n}) + a_z b_{xy} (\bar{k} \cdot \bar{l}) + a_z b_{yz} (\bar{k} \cdot \bar{m}) + a_z b_{zx} (\bar{k} \cdot \bar{n}) = \\ &= b_{xy} \bar{l} (a_x \bar{i} + a_y \bar{j}) + 0 + b_{yz} \bar{m} (a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) + 0 + b_{zx} \bar{n} (a_z \bar{k} + a_x \bar{i}) + 0 = \\ &= b_{xy} \bar{l} \sqrt{(a_x \bar{i} + a_y \bar{j})^2} + b_{yz} \bar{m} \sqrt{(a_y \bar{j} + a_z \bar{k})^2} + b_{zx} \bar{n} \sqrt{(a_z \bar{k} + a_x \bar{i})^2} = \\ &= b_{xy} \bar{l} \sqrt{a_x^2 \bar{i}^2 + 2a_x a_y \bar{i} \bar{j} + a_y^2 \bar{j}^2} + b_{yz} \bar{m} \sqrt{a_y^2 \bar{j}^2 + 2a_y a_z \bar{j} \bar{k} + a_z^2 \bar{k}^2} + b_{zx} \bar{n} \sqrt{a_z^2 \bar{k}^2 + 2a_z a_x \bar{k} \bar{i} + a_x^2 \bar{i}^2} = \\ &= b_{xy} \bar{l} \sqrt{a_x^2 \bar{i}^2 + a_y^2 \bar{j}^2} + b_{yz} \bar{m} \sqrt{a_y^2 \bar{j}^2 + a_z^2 \bar{k}^2} + b_{zx} \bar{n} \sqrt{a_z^2 \bar{k}^2 + a_x^2 \bar{i}^2} = \\ &= b_{xy} \sqrt{a_x^2 + a_y^2} + b_{yz} \sqrt{a_y^2 + a_z^2} + b_{zx} \sqrt{a_z^2 + a_x^2} \\ c &= \left| b_{xy} \sqrt{a_x^2 + a_y^2} + b_{yz} \sqrt{a_y^2 + a_z^2} + b_{zx} \sqrt{a_z^2 + a_x^2} \right| \quad (39)\end{aligned}$$

Уравнение взято по модулю, так как направления углового и прямолинейного векторов не согласуются.

2.9 Векторное произведение смешанных векторов

Векторное произведение смешанных векторов находится из уравнения (29)

$$\begin{aligned}\bar{i} \times \bar{j} &= \bar{l}, & \bar{j} \times \bar{k} &= \bar{m}, & \bar{k} \times \bar{i} &= \bar{n} \\ \frac{1}{\bar{i}} \times \bar{l} &= \bar{j}, & \frac{1}{\bar{j}} \times \bar{m} &= \bar{k}, & \frac{1}{\bar{k}} \times \bar{n} &= \bar{i}\end{aligned}$$

но для единичных векторов

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{i}} &= \bar{i}, & \frac{1}{\bar{j}} &= \bar{j}, & \frac{1}{\bar{k}} &= \bar{k} \\ \bar{i} \times \bar{l} &= \bar{j}, & \bar{j} \times \bar{m} &= \bar{k}, & \bar{k} \times \bar{n} &= \bar{i}\end{aligned}$$

В векторном произведении базисных векторов можно заметить правило выбора знака получаемого вектора. Если угловой и прямолинейный векторы «одинаково» направлены в плоскости системы координат, то результирующий прямолинейный вектор будет положительным, и наоборот. Тогда

$$\bar{j} \times \bar{l} = -\bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{m} = -\bar{j}, \quad \bar{i} \times \bar{n} = -\bar{k}$$

Напомним, последовательность векторов в векторном произведении зависит от выбранной системы координат.

Пример 9: Найдем силу из крутящего момента в координатно-векторном виде.

$$F = \frac{1}{h} M \quad \text{— общий вид уравнения нахождения силы из момента}$$

Для данного уравнения (для правой системы координат, с положительным угловым направлением против часовой стрелки) базисные векторы имеют зависимость:

$$\bar{i} \times \bar{l} = \bar{j}, \quad \bar{j} \times \bar{m} = \bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{n} = \bar{i}, \quad \bar{j} \times \bar{l} = -\bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{m} = -\bar{j}, \quad \bar{i} \times \bar{n} = -\bar{k}, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{1}{h} \times \hat{M} = \bar{h}' \times \hat{M} = (h'_x \bar{i} + h'_y \bar{j} + h'_z \bar{k}) \times (M_{xy} \bar{l} + M_{yz} \bar{m} + M_{zx} \bar{n}) = \\ &= h'_x M_{xy} (\bar{i} \times \bar{l}) + h'_x M_{yz} (\bar{i} \times \bar{m}) + h'_x M_{zx} (\bar{i} \times \bar{n}) + h'_y M_{xy} (\bar{j} \times \bar{l}) + h'_y M_{yz} (\bar{j} \times \bar{m}) + h'_y M_{zx} (\bar{j} \times \bar{n}) + h'_z M_{xy} (\bar{k} \times \bar{l}) + h'_z M_{yz} (\bar{k} \times \bar{m}) + h'_z M_{zx} (\bar{k} \times \bar{n}) = \\ &= h'_x M_{xy} \bar{j} + 0 - h'_x M_{zx} \bar{k} - h'_y M_{xy} \bar{i} + h'_y M_{yz} \bar{k} + 0 + 0 - h'_z M_{yz} \bar{j} + h'_z M_{zx} \bar{i} = \\ &= (h'_z M_{zx} - h'_y M_{xy}) \bar{i} + (h'_x M_{xy} - h'_z M_{yz}) \bar{j} + (h'_y M_{yz} - h'_x M_{zx}) \bar{k} = \\ &= \left(\frac{h_z M_{zx}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} - \frac{h_y M_{xy}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \right) \bar{i} + \left(\frac{h_x M_{xy}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} - \frac{h_z M_{yz}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \right) \bar{j} + \left(\frac{h_y M_{yz}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} - \frac{h_x M_{zx}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \right) \bar{k} = \\ &= \left(\frac{h_z M_{zx} - h_y M_{xy}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \right) \bar{i} + \left(\frac{h_x M_{xy} - h_z M_{yz}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \right) \bar{j} + \left(\frac{h_y M_{yz} - h_x M_{zx}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \right) \bar{k} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k} \end{aligned}$$

$$F_x = \frac{h_z M_{zx} - h_y M_{xy}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \quad F_y = \frac{h_x M_{xy} - h_z M_{yz}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}, \quad F_z = \frac{h_y M_{yz} - h_x M_{zx}}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \quad (40)$$

Example 10: (Drogn & Dubinin, 2005 p.124)

Найдем касательную прямолинейную скорость, в координатно-векторном виде.

$$v = r \cdot w \quad - \text{общий вид уравнения нахождения касательной скорости}$$

Для данного уравнения (для правой системы координат, с положительным угловым направлением против часовой стрелки) базисные векторы имеют зависимость:

$$\bar{i} \times \bar{l} = \bar{j}, \quad \bar{j} \times \bar{m} = \bar{k}, \quad \bar{k} \times \bar{n} = \bar{i}, \quad \bar{j} \times \bar{l} = -\bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{m} = -\bar{j}, \quad \bar{i} \times \bar{n} = -\bar{k}, \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{r} \times \bar{w} = (r_x \bar{i} + r_y \bar{j} + r_z \bar{k}) \times (w_{xy} \bar{l} + w_{yz} \bar{m} + w_{zx} \bar{n}) = \\ &= r_x w_{xy} (\bar{i} \times \bar{l}) + r_x w_{yz} (\bar{i} \times \bar{m}) + r_x w_{zx} (\bar{i} \times \bar{n}) + r_y w_{xy} (\bar{j} \times \bar{l}) + r_y w_{yz} (\bar{j} \times \bar{m}) + r_y w_{zx} (\bar{j} \times \bar{n}) + r_z w_{xy} (\bar{k} \times \bar{l}) + r_z w_{yz} (\bar{k} \times \bar{m}) + r_z w_{zx} (\bar{k} \times \bar{n}) = \\ &= r_x w_{xy} \bar{j} + 0 - r_x w_{zx} \bar{k} - r_y w_{xy} \bar{i} + r_y w_{yz} \bar{k} + 0 + 0 - r_z w_{yz} \bar{j} + r_z w_{zx} \bar{i} = \\ &= (r_z w_{zx} - r_y w_{xy}) \bar{i} + (r_x w_{xy} - r_z w_{yz}) \bar{j} + (r_y w_{yz} - r_x w_{zx}) \bar{k} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} \end{aligned}$$

$$v_x = r_z w_{zx} - r_y w_{xy}, \quad v_y = r_x w_{xy} - r_z w_{yz}, \quad v_z = r_y w_{yz} - r_x w_{zx} \quad (41)$$

3. Заключение

Основная цель этой работы, это обратить внимание на проблемы представления математических моделей векторов угловых величин в системе координат и их несогласованность с физическими величинами. Описанная теория угловых векторов решает данную проблему, мы получаем согласование направлений математических моделей с физическими угловыми величинами. Это позволило вывести уравнения в координатном виде для угловых величин, которые правильно показывают их направления в системе координат.

Операции над угловыми векторами аналогичны операциям над прямолинейными векторами, что облегчает понимание общей теории векторов, несмотря на её увеличение.

В примерах № 3,4 доказана ошибочность общепринятого утверждения, того что результатом векторного произведения двух прямолинейных векторов, является прямолинейный вектор.

Примеры № 5,6,7 доказывают, что результатом векторного произведения двух прямолинейных векторов, является угловой вектор. Перечислим основные аргументы данного утверждения:

Аргумент 1 «от обратного». Из всех возможных векторных произведений векторов, возможно существование только вышеописанного. Примеры № 3,4,8 исключают возможность существования других векторных произведений.

Аргумент 2. Данное векторное произведение существует, так как общий результат (угловой вектор) найденный разными методами совпадает (пример № 5).

Аргумент 3. Только данное векторное произведение наблюдается в природе. Пример № 6,7.

Аргумент 4. Словесное доказательство в общем выводе векторного произведения исключает возможность существования других векторных произведений.

Описано определение и свойства обратного вектора (прямолинейного и углового). Данный вектор позволяет производить операции векторного деления. В результате появилась возможность для вывода формул физических величин в координатно-векторном виде, которые раньше не удавалось получить, как показано в примерах №7,9

Рассмотрены операции: скалярного произведения смешанных векторов, и векторного произведения смешанных векторов.

Наличие большого количества примеров свидетельствует о применимости модели углового вектора и согласованием его с общей теории векторов.

Теория векторов является фундаментальной математической моделью, и данные изменения приведут к улучшению методологии изложения многих физических закономерностей, и решению ряда задач.

Дополнение: Стоит обратить внимание ещё на одну проблему – условно принятое положительное левостороннее угловое направление. Это правило усложняет логическое понимание решаемых задач, потому что люди привыкли, что положительное угловое направление – это направление движения по часовой стрелке. Этот стереотип люди запоминают с детства. К тому же задача любой науки – облегчить понимание какого-то природного явления, и я думаю, что нужно считаться с этим стереотипом. Еще одним аргументом против принятого левостороннего углового направления, будет то, что это правило принято условно, без каких-либо логических объяснений.

Самый легкий способ решить данную проблему, это, изменить названия осей системы координат и единичных векторов, рис.11. Но правильнее будет, официально признать положительное направление по часовой стрелки и заново вывести все формулы в координатно-векторном виде.

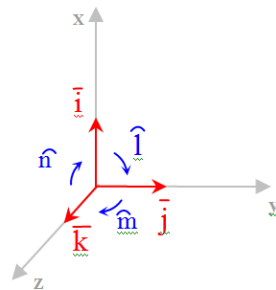


Рис. 11: Изменение положений координатных осей и единичных векторов

Благодарность

Я хотел бы выразить глубокую благодарность Вишневному Максиму Викторовичу: первому моему рецензенту и давнему другу, математику и специалисту по космической отрасли.

Используемая литература:

- Borisenko, A.I. & Tarapov, I.E. (1979). *Vector and tensor analysis with applications*. New York: Dover.
- Boothroyd, G. & Poli, C. (1980). *Applied engineering mechanics*. University of Massachusetts, NY: Marcel Dekker.
- Dennis, G.Z. & Michael, R.C. (2006). *Advanced engineering mathematics*. Jones & Bartlett Learning.
- Doran, C. & Lasenby, A. (2007). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press.
- Drogn, V.I. & Dubinin, V.V. (2005). *Course of theoretical mechanics*. Moscow: MSTU.

- Khan, R.M. (2013). *Analytical Geometry and Vector Algebra*. Delhi, DEL, India:New Central Book Agency.
- Khiman, A.D. (2015). *Engineering mechanics. Statics and dynamics*.
- Rutherford, D.E. (2004). *Vector Methods Applied to Differential Geometry, Mechanics, and Potential Theory*. Mineola, New York: Dover.
- Szolga, V. (2010). *Theoretical mechanics, lecture notes and sample problems*
- Vasishtha, A.R. (2010). *Vector algebra*. Meerut,India: Krishna Prakashan.
- Wilson, Edwin Bidwell (1901). *Vector Analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*.Yale University Press.